a	b	$s = \frac{1}{2}(a+b)$	$f(s)$
3,1416	4,6810	3,9113	-2,9422
3,9113	4,6810	4,2962	-2,0341
4,2962	4,6810	4,4886	-0,0954
4,4886	4,6810	4,5848	3,2095
4,4886	4,5848	4,5367	1,0963
4,4886	4,5367	4,5126	0,4271
4,4886	4,5126	4,5006	0,1508
4,4886	4,5006	4,4946	0,0244
4,4886	4,4946	4,4916	-0.0361
4,4916	4,4946	4,4931	-0,0062
4,4931	4,4946	4,4939	0,0089

Nulový bod leží v intervalu $(4,4931; 4,4946)$ a číslo $x_1 = 4,493$ je aproximací kořene s přesností 10^{-3}. Pokud bychom náš výpočet prodloužili, získali bychom nulový bod s přesností 10^{-7} jako $x_1 = 4,4934095$. ♡

```
procedure Bisect (f: funkce; var left: real; var right: real );
var midpoint, eps: real;

begin
 eps:=1e-8;                      {zadani presnosti vypoctu}
 repeat
  midpoint:=(left+right)/2;      {vypocet stredniho bodu}
  if f(left)*f(midpoint)>0 then left:=midpoint
                           else right:=midpoint;
 until abs(right-left)<eps;
end;
```

Pokud procedura úspěšne proběhne, je hledaný nulový bod bodem intervalu (`left`, `right`). Délka intervalu je přitom menší než požadovaná přesnost `eps`.

Věta 2.6. *(***O hodnotách spojité funkce***) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na (a, b) a v (a, b) není žádný nulový bod. Pak buď $\forall x \in (a, b)$ je $f(x) > 0$ nebo $\forall x \in (a, b)$ je $f(x) < 0$.*

Věta 2.7. *(***O obrazu spojité funkce***) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na libovolném intervalu* **I**, *pak $f(\mathbf{I})$ je opět interval nebo jednoprvková množina.*

Věta 2.8. *(***O spojitosti inverzní funkce***) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá a ryze monotonní na intervalu* **I**. *Pak f^{-1} je spojitá na $f(\mathbf{I})$.*

3. Derivace funkce

Definice 3.1. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována na nějakém okolí $U(a)$ bodu $a \in \mathbb{R}$. Pokud existuje limita*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a), \qquad (D)$$

nazýváme ji derivací funkce f v bodě a. *Analogicky jako limity zprava, resp. zleva se definují* derivace zprava v bodě a, *resp.* derivace zleva v bodě a *a značíme je $f'_+(a)$, resp. $f'_-(a)$.*

- Pokud je hodnota limity (D) vlastní, jedná se o vlastní derivaci. V případě nevlastní hodnoty mluvíme o nevlastní derivaci.
- Hodnota derivace a její existence je lokální vlastnost funkce.
- Pokud zavedeme $x = a + h$, lze limitu (D) přepsat na tvar
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$
- Uvědomme si, že pokud existuje limita, je určena jednoznačně, tedy každá funkce má v libovolném bodě nevýše jednu derivaci.
- Mějme funkci
$$f : y = f(x), x \in D(f) \text{ a množinu } D' = \{x \in D(f) | \text{ existuje vlastní } f'(x)\}.$$
Pak $f' : y = f'(x), x \in D'$ je také funkce a můžeme uvažovat o její derivaci v bodě $a \in D' \subset D(f)$. Derivaci $(f')'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$ budeme nazývat *druhou derivací funkce v bodě* a a budeme ji značit $f''(a)$.

Definice 3.2. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má vlastní derivaci $f^{(n-1)}, n \in \mathbb{N}$ v nějakém $U(a)$, $a \in D(f)$, pak definujeme* n-tou derivaci funkce v bodě a *jako*

$$f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a),$$

pokud má pravá strana smysl. Dále klademe $f^{(0)} = f$.

3.1. **Základní vlastnosti derivace.**

Věta 3.1. *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$. *Funkce* f *má v bodě* a *derivaci* $f'(a)$ *právě když má v bodě* a *obě jednostranné derivace a platí* $f'_+(a) = f'_-(a) = A$. *Je pak* $f'(a) = A$.

Věta 3.2. *Má-li* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *v bodě* $a \in \mathbb{R}$ *vlastní derivaci zprava* $f'_+(a)$, *je v tomto bodě spojitá zprava.*

Věta 3.3. *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $a \in \mathbb{R}$ *vlastní obě jednostranné derivace (není nutné, aby si byly rovny). Pak* f *je v* a *spojitá.*

Věta 3.4. *(***O derivaci součtu, součinu a podílu***) Nechť* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mají v* $a \in \mathbb{R}$ *vlastní derivace* $f'(a)$ *a* $g'(a)$. *Pak*

(1) $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
(2) $(f.g)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a)$,

Je-li navíc $g(a) \neq 0$, *platí*

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a).g(a) - f(a).g'(a)}{g^2(a)}$.

Věta 3.5. *(***O derivaci složené funkce***) Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *má vlastní derivaci v bodě* $a \in \mathbb{R}$ *a* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vlastní derivaci v bodě* $f(a)$. *Pak existuje vlastní derivace složené funkce* $g \circ f$ *v bodě* a *a je*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Věta 3.6. *(***O derivaci inverzní funkce***) Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je spojitá a ryze monotonní na intervalu* $\mathbf{I}$, *nechť* f^{-1} *je její inverzní funkce na* $\mathbf{I}$ *a nechť* a *je vnitřní bod* $\mathbf{I}$. *Jestliže* $f'(a) \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$, *pak*

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

3.2. Derivace elementárních funkcí.

Tabulka základních derivací

	f	f'	$D(f)$	$D(f')$	Poznámka
1.	const.	0	$\mathbb{R}$	$=$	
2.	x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$=$	$n \in \mathbb{N}$
3.	x^z	zx^{z-1}	$\mathbb{R}$	$=$	$z \in \mathbb{Z}$
4.	x^a	ax^{a-1}	$(0, \infty)$	$=$	$a \in \mathbb{R}$
5.	e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$=$	
6.	a^x	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$	$=$	$a \in (0, \infty)$
7.	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(0, \infty)$	$=$	
8.	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$(0, \infty)$	$=$	$a \in (0,1) \cup (1, \infty)$
9.	$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$=$	
10.	$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$=$	
11.	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$	$=$	
12.	$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}$	$=$	
13.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$< -1, 1 >$	$(-1, 1)$	
14.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$< -1, 1 >$	$(-1, 1)$	
15.	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$=$	
16.	$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$=$	

"=" označuje rovnost definičních oborů $D(f) = D(f')$

Základy matematiky I

Tabulka derivací základních funkcí

	$f(x)$	$f'(x)$
1.	c	0
2.	x^n	$n \cdot x^{n-1}$, $n \in N$
3.	x^z	$z \cdot x^{z-1}$, $z \in Z$
4.	x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$
5.	e^x	e^x
6.	a^x	$a^x \ln a \ (a > 0)$
7.	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
8.	$log_a\ x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
9.	$\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$
10.	$\sin x$	$\cos x$
11.	$\cos x$	$-\sin x$
12.	$tg\ x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
13.	$cotg\ x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
14.	$arcsin\ x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
15.	$arccos\ x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
16.	$arctg\ x$	$\dfrac{1}{1 + x^2}$
17.	$arccotg\ x$	$-\dfrac{1}{1 + x^2}$

Obecná pravidla pro derivování funkcí

	$F(x)$	$F'(x)$	
I.	$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$	(derivace součtu funkcí)
II.	$c \cdot f(x)$, c je konstanta	$c \cdot f'(x)$	(derivace násobku funkce)
III.	$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	(derivace součinu funkcí)
IV.	$\dfrac{1}{g(x)}$	$-\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$	(derivace převrácené funkce)
V.	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$	(derivace podílu funkcí)
VI.	$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$	(derivace složené funkce)
VII.	$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$	
VIII.	$\ln f(x)$ (pro $f(x) > 0$)	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	
IX.	$f(x)$ (pro $f(x) > 0$)	$f(x) \cdot (\ln(f(x))'$	(logaritmické derivování)
X.	$f(x)^{g(x)}$	$f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)$	(podle log. derivování)